4

Apprentissage de l'arithmétique

Il est impossible d'évoquer la genèse du nombre et des habiletés numériques chez l'enfant sans évoquer Piaget et de ses collaboratrices (Piaget et Szeminska, 1941 ; Piaget et Inhelder, 1959). L'objectif de Piaget était de montrer que la construction de la notion de nombre ne dépend pas du langage, mais de l'action intériorisée devenue réversible, c'est-à-dire de ses aspects opératifs. Pour Piaget, le nombre est solidaire d'une structure d'ensemble sans laquelle il n'y a pas de conservation des totalités numériques. Il n'est intelligible que dans la mesure où il demeure identique à lui-même quelle que soit la disposition des unités dont il est composé. C'est la raison pour laquelle Piaget a essentiellement étudié le nombre au travers de tâches dites de conservation. La conservation du nombre résulterait d'une coordination des diverses dimensions en jeu (l'espace occupé par une collection et la densité) et relèverait d'une pensée opératoire et logique.

Bien qu'ayant eu une énorme importance tant en psychologie qu'en pédagogie, l'approche « logiciste » de Piaget ne peut expliquer les premières acquisitions de l'enfant. D'une part, la tâche de conservation du nombre a reçu d'innombrables critiques (pour une revue, Fayol, 1990). Les données empiriques suggèrent que la réussite à cette tâche ne relève pas de la logique opératoire que Piaget y décelait et qu'elle n'a pas le caractère essentiel qu'il lui prêtait. D'autre part, bien avant l'accès au stade opératoire concret, les enfants d'école maternelle manifestent préalablement à tout apprentissage académique, un large éventail d'habiletés numériques comme le comptage, le dénombrement, et même la résolution de problèmes additifs simples (Siegler, 1996). Ces constats affaiblissent l'importance d'une supposée rupture développementale aux alentours de 7 ans marquée par l'accès à une première forme de logique concrète et dont l'indice le plus fiable serait la conservation du nombre.

Cependant, l'approche piagetienne a fortement contribué à renouveler notre conception des rapports entre l'enfant et le nombre. D'une part, la découverte par Piaget d'une intelligence préverbale chez le bébé a ouvert la voie aux études portant sur les compétences numériques précoces chez le nourrisson. D'autre part, l'attention portée à une compréhension du nombre allant au-delà de la simple maîtrise d'habiletés d'énumération, de dénombrement ou de calcul conserve toute sa valeur.

Prémices du nombre

Les capacités des animaux, des bébés et des peuplades dites « primitives » à discriminer des quantités ont été étudiées afin de repérer des capacités numériques élémentaires.

Capacités numériques chez l'animal

Les performances des animaux (singes, rats, pigeons) à des tâches de comparaison ou de discrimination de quantités d'objets ou d'événements montrent que les animaux réussissent mais de manière imparfaite (pour une synthèse, Brannon, 2005). Leurs choix, d'une part, ne sont pas aléatoires et, d'autre part, présentent une variabilité d'un essai à l'autre et d'une quantité à l'autre autour d'une moyenne. Cette variabilité augmente avec l'accroissement de la taille (ou magnitude) des entités à comparer. Les données collectées auprès de différentes espèces ont mis en évidence que le rapport de la dispersion des évaluations sur la taille de la quantité à estimer était une constante, ce qui correspond à une donnée classique de la psychophysique (la loi de Weber). Les animaux disposeraient d'une représentation mentale des magnitudes qui serait formellement analogue à des points sur une ligne de nombres. Cette représentation serait « floue » en ce sens que, même après un long entraînement, les animaux ne parviennent pas à déterminer exactement la numérosité d'une collection ou d'une série discrète de 4, 6 ou 8 éléments (Hauser et coll., 2000).

Capacités numériques chez le bébé

La sensibilité des jeunes enfants (de moins de 12 mois) à la quantité est réputée très précoce. Par exemple, ils discriminent les groupes d'objets ou de jetons sous réserve que les quantités soient petites (1, 2 et 3 items) (Starkey et Cooper, 1980 ; Strauss et Curtis, 1981 ; Antell et Keating, 1983). Il se pourrait même qu'ils disposent d'une représentation amodale des quantités puisqu'ils sont en mesure de discriminer et apparier les nombres d'événements (Canfield et Smith, 1996 ; Wynn, 1996 ; Sharon et Wynn, 1998) et les ensembles de sons (Bijeljac-Babic et coll., 1993) sur la base de la quantité. Toutefois, ces résultats déjà anciens ont donné lieu à des analyses critiques qui interdisent de les tenir pour acquis.

Une question importante et mal résolue a trait au caractère numérique ou non des représentations ainsi mises en évidence. S'agit-il de représentations d'emblée spécifiquement numériques, et donc discrètes, ce qui étayerait l'hypothèse de l'existence d'un système inné dédié au traitement du nombre (Wynn, 1998) ? S'agit-il plutôt d'un système traitant des quantités continues, le caractère numérique discret n'étant pas inhérent à ce mode de traitement et n'apparaissant que plus tard ? S'agit-il d'un système général, non spécifiquement dédié au nombre ni à la quantité, traitant des objets discrets, et dont certaines propriétés pourraient laisser penser qu'on a affaire à des traitements numériques (Simon, 1997) ?

Plusieurs séries de recherches prétendent établir que les enfants n'ayant pas encore acquis le langage ont une représentation précise des petites quantités. Toutefois, dans la plupart des expériences, le matériel confond le nombre d'éléments et diverses dimensions continues étroitement corrélées à la numérosité (la surface, le volume) (Starkey et Cooper, 1980). Ce constat a conduit Feigenson et coll. (2002) à réaliser une série d'expériences dans lesquelles ils utilisent de petits ensembles d'objets tridimensionnels conduisant à manipuler conjointement les dimensions numérique et continue. De manière générale, les données rapportées par Feigenson et coll. montrent que les jeunes enfants sont en mesure de discriminer les petites quantités (1/2 ; 2/3), et que ces discriminations sont très précocement associées à la relation plus/moins. En revanche, elles remettent en question la spécificité d'un système dédié au seul traitement numérique.

Lorsque les collections comportent plus de 4 ou 5 objets, les très jeunes enfants se référeraient à une représentation analogique fournissant une quantification approximative. Le traitement pourrait dépendre d'un autre type de processus associé à une ligne analogique numérique (Mix et coll., 2002). Deux expériences ont produit des données sans équivoque à l'appui de cette thèse. Il a été montré en contrôlant la surface, la densité, la brillance et l'enveloppe des collections que les enfants de 6 mois manifestent une déshabituation quand on passe de 8 à 16 jetons (puis de 16 à 32) mais non de 8 à 12 (Xu, 2000 ; Xu et Spelke, 2000). Ces données suggèrent que les enfants ont besoin d'un rapport de 1/2 pour discriminer les quantités, au moins lorsqu'elles dépassent une certaine taille et/ou qu'elles sont traitées comme des dimensions continues.

Des données complémentaires mettent en évidence que les nouveau-nés de 9 mois sont en mesure d'évaluer le caractère réaliste ou non des quantités (>5) résultant de l'ajout ou du retrait d'une quantité donnée à une collection initiale (McCrink et Wynn, 2004)

En résumé, les nouveau-nés semblent, comme les animaux, en mesure de mobiliser deux systèmes différents pour le traitement des quantités. L'un, précis mais ne s'appliquant qu'aux petits ensembles discrets (1, 2 et 3) ; l'autre, extensible aux très grandes quantités, opérant sur les dimensions continues ou traitant comme tels les ensembles d'éléments discrets, fournissant une évaluation approximative suivant la loi de Weber (Fayol et Seron, 2005). La question du caractère spécifiquement numérique de ces modes de traitement reste posée, tout comme celle des caractéristiques des représentations sur lesquelles ils pourraient s'effectuer.

Capacités numériques chez les peuplades dites « primitives »

Les études anthropologiques ont également mis en évidence chez des peuplades dites « primitives » des capacités numériques élémentaires similaires à celles des bébés. L'opposition entre peuples civilisés et peuples dits « primitifs » qui s'articule, entre autres, sur une opposition entre mentalité logique et mentalité pré-logique doit beaucoup aux considérations des ethnographes de la fin du 19e siècle et du début du 20e (Lévy-Bruhl, 1912). Le « primitivisme » sous-jacent à cette conception qui considère que les systèmes les plus primitifs sont les plus simples et que le comptage dans les sociétés sans écriture serait immergé dans le concret, confinant ainsi bien des peuplades à la fameuse suite « un, deux, trois, beaucoup », perdure encore dans les travaux de synthèse les plus répandus (Ifrah, 1994). Or, de nombreux travaux d'africanistes montrent l'omniprésence de systèmes numériques dans des groupes qui font peu de cas de leurs procédés de calcul et de leur système de numération (Fainzang, 1985). Des nombres élevés peuvent être atteints en poursuivant un comput qui fonctionne par « application » de l'ensemble des doigts et des orteils sur chacun d'entre eux. Ces études anthropologiques attestent de l'existence de systèmes numériques plus ou moins élaborés, y compris dans les sociétés présentées comme les plus « primitives ». Par ailleurs, si la connaissance et l'utilisation de systèmes verbaux permettant une évaluation précise des quantités ne sont pas attestées dans certaines peuplades, les individus qui en sont membres sont néanmoins capables de réaliser des évaluations globales approximatives du même type que celles qui ont été mises en évidence chez les nouveau-nés (Pica et coll., 2004).

Il reste de nombreuses interrogations sur les capacités numériques élémentaires et aucun modèle ne permet actuellement de rendre parfaitement compte de toutes les observations. Nous savons que les bébés, les peuplades dites « primitives » et les animaux sont à la fois capables de détecter certains types de propriétés auxquelles les enfants plus âgés et les adultes de nos sociétés peuvent attacher des représentations numériques et d'évaluer de manière approximative les quantités, vraisemblablement en s'appuyant sur les propriétés continues (longueur, surface, intensité…). Certains résultats peuvent être interprétés comme attestant l'existence de capacités numériques innées, produit de l'évolution des espèces. Même si tel est le cas, ces capacités ne constituent qu'un point de départ. Les connaissances mathématiques plus complexes que l'être humain a développées au cours de son histoire vont bien au-delà et font appel à des systèmes numériques symboliques.

Premiers apprentissages

Les premiers apprentissages numériques font appel au système verbal et obéissent à une chronologie dont les processus ont fait l'objet de plusieurs modèles explicatifs.

Acquisition de la chaîne verbale

Dans nos sociétés, les activités ayant trait à la numération orale mobilisent un système verbal faisant intervenir un lexique et des règles de combinaison.

Les systèmes verbaux sont des systèmes conventionnels reposant sur deux grands principes :

- la lexicalisation qui est un processus élémentaire associant à une cardinalité une dénomination et une seule (cinq ; seize) ;
- une syntaxe constituée de règles combinatoires permettant d'élaborer une infinité de formulations complexes correspondant à n'importe quelle cardinalité (exemple : six cent soixante-quinze millions trois cent dix mille deux).

Dans le cas du nombre, les règles syntaxiques opposent des combinaisons de types additif (cent trois) ou multiplicatif (trois cents) (Power et Longuet-Higgins, 1978). Le système numérique oral français repose sur la lexicalisation des cardinalités allant jusqu'à 16, des dizaines de vingt à soixante, de cent, mille, million et milliard, sur une syntaxe codant uniquement des relations additives jusqu'à 79 (exemple : vingt-cinq = vingt + cinq) et sur une syntaxe combinant les relations additives et multiplicatives (exemple : quatre cent six = quatre x cent + six) (Fayol, 2002).

La chaîne verbale orale s'acquiert entre deux et six ans. Fuson et coll. (1982) ont établi que les suites numériques produites par les enfants en cours d'apprentissage s'organisent initialement suivant trois parties :

- stable et conventionnelle, qui s'accroît avec l'âge, surtout à partir de 4 ans et demi ;
- stable et non conventionnelle, qui concerne surtout les nombres entre 10 et 19 ;
- ni stable ni conventionnelle, qui change d'un essai à l'autre.

Cette construction progressive de la suite numérique reflète un apprentissage par cœur de type sériel. Elle est lente et difficile et les différences interindividuelles sont faibles. À partir de 4 ans et demi, le nombre de formes verbales disponibles augmente rapidement et certains enfants commencent à utiliser les règles de la combinatoire. Les différences interindividuelles se creusent alors entre les enfants utilisant déjà la combinatoire et ceux qui en sont encore à l'apprentissage par cœur. Ces différences sont particulièrement marquées entre les performances des enfants occidentaux, confrontés à des systèmes verbaux irréguliers, et les enfants du sud-est asiatique qui acquièrent très vite des systèmes à la base dix saillante (Miller et Paredes, 1996) (pour une synthèse, voir Fayol, 2002).

Processus de quantification

Trois processus de quantification sont distingués : le dénombrement, le *subitizing* et l'estimation (Fayol, 1990 ; Geary, 1994 ; Dehaene, 1997 ; Camos, 1999). En ce qui concerne l'émergence du dénombrement dans l'enfance, deux points de vue théoriques s'opposent : la théorie dite des « principes en premier » et celle dite des « principes après ». La théorie des principes en premier affirme que les principes guidant le dénombrement seraient innés.

additions et soustractions simples (Wynn, 1992). Cette conception n'est toutefois pas acceptée par tous. En revanche, il est clair que dès 5 ans, et avant tout enseignement formel, beaucoup d'enfants de diverses cultures résolvent des problèmes arithmétiques simples (ajouts et retraits de quantités correspondant à des nombres à 1 chiffre) à l'aide du comptage (Siegler et Jenkins, 1989). Les stratégies utilisées par les jeunes enfants dérivent de leur habileté préexistante à dénombrer des collections. Bien qu'il existe des différences liées à la culture (Saxe, 1982), et même au sexe dans les stratégies utilisées, il existe d'importantes ressemblances dans le développement de l'arithmétique chez l'enfant (Geary, 1994).

Opérations simples

Pour résoudre les additions simples comme 4+3, les enfants disposent de cinq classes générales de stratégies : l'utilisation d'objets, le comptage sur les doigts, le comptage verbal, les décompositions et enfin la récupération directe en mémoire du résultat (Carpenter et Moser, 1983 ; Siegler, 1987). Les mêmes classes de stratégies sont observées pour les soustractions, auxquelles s'en ajoute une autre faisant appel à l'addition indirecte correspondante (exemple : 3+?=7 pour résoudre 7-3 ; Baroody, 1984).

En ce qui concerne les additions simples, Fuson (1982) a montré que les enfants, dès l'âge de 3 ans, peuvent utiliser des objets pour répondre à des questions telles que « combien font 3 gâteaux et 2 gâteaux ? » en matérialisant chaque nombre à additionner par une collection d'objets et en dénombrant la collection résultante à l'aide du pointage manuel. Cependant, les enfants de 4 et 5 ans utilisent plus fréquemment le comptage sur les doigts ou le comptage verbal pour résoudre les additions simples (Siegler et Shrager, 1984).

La transition du comptage sur les doigts au comptage verbal est progressive et dépend principalement de la capacité de l'enfant à contrôler mentalement le déroulement du calcul et à conserver une trace de ce qui a déjà été et de ce qui reste à compter. En ce qui concerne les stratégies verbales, les enfants d'école maternelle semblent utiliser le plus fréquemment les stratégies « tout compter » et « surcompter ». La première consiste à compter les deux nombres en partant de 1 : 3 + 4 est résolu en comptant 1, 2, 3, puis en poursuivant par un nombre de pas équivalent au second opérande : 4, 5, 6, 7. La seconde consiste à débuter directement le comptage à partir du premier opérande : 3, 4, 5, 6, 7. La stratégie de comptage verbal la plus sophistiquée et privilégiée dès la première année de primaire aboutit à compter non plus à partir du premier mais à partir du plus grand des deux nombres (stratégie dite du Min pour minimum, Groen et Parkman, 1972). Cette stratégie semble être « inventée » par les enfants et ne pas leur être enseignée.

Des procédures équivalentes sont relevées avec les soustractions. Dès 4 ou 5 ans, beaucoup d'enfants sont capables de résoudre des soustractions simples à l'aide de matériel manipulable. Trois stratégies principales ont été décrites (Carpenter et Moser, 1984) : « séparer de », consiste, pour calculer 5-3, à ôter 3 objets d'un ensemble de 5 et à dénombrer le résidu ; « ajouter à partir de », consiste à placer 3 objets, puis à ajouter des objets jusqu'à obtention d'un ensemble de 5. Le nombre d'objets ajoutés constitue le résultat ; « apparier », consiste à placer deux ensembles de 5 et 3 objets en correspondance terme à terme et à dénombrer les objets restant isolés.

Même chez de jeunes enfants, la sélection de la procédure de résolution dépend du problème posé. Par exemple, la question « Jean a 5 billes, il en donne 3 à Luc, combien lui en reste-t-il ? » sera préférentiellement résolue par une stratégie « séparer de », alors que le problème « Jean a 5 billes, Luc a 3 billes, combien Jean a-t-il de billes de plus que Luc » le sera par mise en correspondance des deux ensembles (apparier) (Carpenter et Moser, 1983 ; Riley et coll., 1983 ; De Corte et Verschaffel, 1987 ; Fayol, 1991 pour une synthèse). Cette flexibilité suggère que l'arithmétique intuitive des enfants de l'école maternelle repose en partie sur une représentation analogique des situations problèmes qu'ils ont à résoudre. Le comptage sur les doigts ou le comptage verbal simulent au moins initialement ces stratégies élémentaires.

Ces stratégies ne sont pas enseignées aux enfants mais découvertes par eux (Siegler et Jenkins, 1989). À son entrée à l'école primaire, l'enfant a déjà une longue expérience de la pratique de l'addition et a développé diverses stratégies. De toutes celles-ci, la plus rapide et la plus sûre est la récupération directe du résultat en mémoire. Rarement enseignée avec l'addition ou la soustraction, l'utilisation récursive des procédures de comptage pour résoudre un même problème conduirait à une association en mémoire à long terme du problème avec le résultat. Lorsque cette association est suffisamment forte, le résultat serait directement activé par la présentation des opérandes et récupéré en mémoire (Ashcraft, 1992). Cependant, la récupération de ces faits numériques semble plus fréquente pour l'addition que pour la soustraction qui demeurerait principalement résolue par des procédures de comptage.

À l'inverse de ce qui a été observé pour les additions et soustractions, il ne semble pas exister de développement spontané de procédures de comptage pour les multiplications et divisions chez les enfants d'âge préscolaire. Ceci est probablement lié au fait qu'il n'existe pas pour la multiplication (et a fortiori pour la division) d'algorithme élémentaire de calcul suffisamment fiable et rapide (Roussel et coll., 2002). Les multiplications simples semblent principalement acquises par apprentissage par cœur des tables (Geary, 1994), et les résultats récupérés directement en mémoire, ce qui pose un double problème. Le premier a trait à la mémorisation des associations entre opérandes et résultats (Lemaire et coll., 1994) ; le second concerne la récupération du seul résultat associé à une paire donnée d'opérandes alors même que cette paire est parfois reliée à plusieurs résultats (Campbell, 1987 ; Lemaire et coll., 1996 ; Barrouillet et coll., 1997). La division a été la moins étudiée des quatre opérations. Les enfants semblent utiliser deux stratégies principales de résolution. La première consiste en une récupération des faits multiplicatifs associés (Campbell, 1997). La seconde s'appuie sur l'addition récursive du diviseur jusqu'à atteinte du dividende.

Opérations complexes

Les opérations complexes sont celles qui portent sur des nombres à plusieurs chiffres et dont la résolution passe habituellement par des algorithmes de calcul reposant sur la notation positionnelle. Les recherches dans ce domaine sont rares (Charness et Campbell, 1988). La plupart des études se sont limitées à la description des erreurs les plus fréquemment commises par les enfants dans l'utilisation de la retenue, erreurs souvent appelées *bugs* (VanLehn, 1990). Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour identifier avec précision les difficultés que rencontrent les enfants, les déterminants de ces difficultés et les moyens d'y remédier.

Modèles développementaux

Les premiers modèles concevaient le développement de l'arithmétique comme une succession de stades caractérisés chacun par un type de stratégie. Par exemple, le *Min model* de Groen et Parkman (1972) postulait que les jeunes enfants utilisent la stratégie « tout compter », que les enfants de 6 et 7 ans utilisent la stratégie Min et que les enfants plus âgés et les adultes utilisent la stratégie de récupération directe du résultat en mémoire. Cette conception est aujourd'hui abandonnée au profit de la conception de Siegler. Selon Siegler (1996), les enfants disposent à tous les âges d'un éventail de stratégies, même pour résoudre les problèmes en apparence les plus simples. Le problème se pose alors de savoir comment est sélectionnée une stratégie particulière pour un problème donné. Selon Siegler (1996), le choix des stratégies s'accompagne de cinq phénomènes fondamentaux : la variabilité, la flexibilité adaptative, le changement, les différences individuelles, et enfin la généralisation. La variabilité renvoie au fait que les individus utilisent une variété de stratégies, même pour résoudre un même problème. Ce choix de stratégie est adaptatif : les individus tendent à utiliser la stratégie la plus efficace et la moins coûteuse pour un problème donné (Siegler et Shrager, 1984). Le changement se traduit par le fait qu'au cours du développement, de nouvelles stratégies sont acquises, la fréquence d'utilisation des stratégies antérieures se modifie, celles qui se maintiennent deviennent toujours plus précises et rapides et enfin, la pertinence des choix de stratégies disponibles s'améliore (Siegler et Jenkins, 1989). Les différences interindividuelles sont par ailleurs considérables (Siegler, 1988). Enfin, le choix d'une stratégie nécessite que les leçons tirées des expériences passées soient généralisées aux problèmes et situations nouvelles (Siegler et Shipley, 1995). Ce choix n'est pas systématiquement déterminé par l'utilisation consciente et délibérée de connaissances dites métacognitives. Il dépendrait de la force d'association entre le problème à résoudre et les diverses réponses préalablement produites par le système, ainsi que d'informations stockées et automatiquement traitées sur la précision, la vitesse et le coût de mise en œuvre de chaque stratégie pour un problème donné. Ces informations seraient acquises à l'aide de processus associatifs élémentaires mis en œuvre lors des expériences passées (Siegler et Shrager, 1984 ; Siegler et Shipley, 1995).

Performance experte

Les modèles disponibles considèrent plus ou moins explicitement que le développement conduit à l'utilisation d'une stratégie unique de récupération des résultats en mémoire, pour l'addition comme pour la multiplication. Or de nombreuses données conduisent à nuancer ce point de vue. Par exemple, Lefevre et coll. (1996) rapportent que les adultes résolvent 30 % des additions simples par des procédures algorithmiques de calcul. En outre, les stratégies utilisées par les enfants dépendent fortement de l'environnement pédagogique et culturel et le recours systématique à la récupération en mémoire d'un apprentissage systématique des tables. Ainsi, Geary (1996) rapporte que les enfants chinois de CE2 sont extrêmement plus rapides que leurs homologues américains pour résoudre les additions. Cette différence de vitesse et d'exactitude entre enfants asiatiques et nord-américains tient autant aux pratiques scolaires qu'aux différences culturelles dans l'importance que les parents accordent aux acquisitions arithmétiques et à l'attention qu'ils portent aux progrès de leurs enfants (Campbell et Xue, 2001).

Enfin, les stratégies utilisées par les enfants dépendent à la fois de l'environnement pédagogique et de la compréhension qu'ils ont des concepts qui sous-tendent les procédures. La découverte par les jeunes enfants des procédures algorithmiques pour les additions simples ainsi que la maîtrise des algorithmes de résolution des opérations complexes par les élèves de l'école primaire sont largement déterminées par leurs connaissances conceptuelles sur les nombres, la notation positionnelle ou encore le sens et la nature des opérations (Fuson, 1990). Nous avons déjà mentionné la supériorité des enfants asiatiques sur les enfants nord-américains, mais aussi européens dans le domaine de l'arithmétique. Fuson et Kwon (1992) observaient que pratiquement tous les enfants coréens de cours élémentaire, dont les performances en résolution d'opérations sont excellentes, maîtrisaient aussi correctement la notation positionnelle, comprenaient l'organisation en base 10 des nombres, et étaient capables d'expliquer les procédures efficaces. Ces connaissances conceptuelles ont été observées dans d'autres pays asiatiques (Stevenson et Stigler, 1992). Parallèlement, les faibles performances des enfants nord-américains en résolution d'opérations s'accompagnent en réalité d'une fréquente incompréhension de la notation positionnelle

(Fuson, 1990). Les connaissances procédurales et conceptuelles semblent ainsi étroitement liées. Dans une étude longitudinale du CP au CM1, Hiebert et Wearne (1996) ont montré que les enfants qui avaient la compréhension la mieux développée au mois de décembre de l'année de CP étaient ceux qui présentaient les habiletés procédurales les plus solides au CM1.

L'évolution des stratégies de résolution des opérations met en évidence le rôle primordial que joue le langage dans la cognition numérique de l'être humain. Au départ verbales et gestuelles, ces stratégies évoluent vers de simples systèmes d'exploitation de la chaîne numérique verbale culminant dans la récupération d'informations en mémoire. Ainsi, les habiletés arithmétiques entretiennent des rapports étroits avec le langage, rapports dont l'analyse constitue le contenu de la partie suivante.

Langage et mathématiques

Dans la vie courante, la pratique des activités numériques est tellement associée à l'utilisation du langage que l'une et l'autre paraissent indissociables. Or, les données issues de la psychologie comparative, de la pathologie et de la psychologie du développement montrent que la relation entre langage et activités numériques est moins étroite qu'on ne le pense intuitivement. Ce constat oblige à reconsidérer le rôle du langage : intervient-il ? Si oui, quand ? Comment ? À propos de quelles activités (par exemple le comptage, le dénombrement, la résolution des opérations) ?

Relations complexes entre nombre et langage

Les nouveau-nés, les enfants d'âge scolaire et les adultes semblent disposer d'une capacité primitive et précoce d'évaluation approximative des quantités. Cette capacité étant préverbale, le problème se pose des relations qu'elle entretient avec les systèmes verbaux. Les descriptions de doubles dissociations (Butterworth, 1999) suggèrent que les capacités numériques peuvent être spécifiquement affectées par un trouble sans que les capacités langagières le soient, et inversement. Ce constat est un argument fort en faveur de l'indépendance de ces deux capacités (Dehaene et Cohen, 2000).

Le langage n'apparaît plus comme le médium supportant nécessairement les traitements numériques et autorisant seul les traitements arithmétiques. Il faut donc s'interroger sur l'éventuel impact du langage sur la réalisation des activités arithmétiques. Certaines thèses postulent l'existence d'une représentation amodale (McCloskey, 1992) alors que d'autres considèrent que le langage est le mode privilégié de représentation des nombres (Brysbaert et coll., 1998). Il existe indéniablement des relations entre activités arithmétiques et activités langagières. La difficulté tient à la délimitation et à la détermination de ces relations (Campbell, 1994a et b ; Brysbaert et coll., 1998 ; Spelke et Tsivkin, 2001).

Évolution des relations entre nombre et langage

L'existence de capacités précoces d'évaluation des quantités a laissé penser que l'acquisition des premiers nombres devrait être rapide et facile. Il s'agirait d'établir des associations simples entre des étiquettes verbales et des quantités petites et peu nombreuses (par exemple, un, deux et trois) qui sont très tôt discriminées. En fait, l'acquisition de la signification cardinale des noms de nombres soulève deux problèmes, qui ont été largement sous-estimés (Fayol, 2002). Le premier concerne le caractère abstrait du codage de l'accroissement des quantités par les dénominations (English et Halford, 1995) : l'ordre des noms de nombre code de manière conventionnelle l'accroissement des quantités. Le second a trait au caractère catégoriel de l'emploi des termes du lexique des nombres (Mix, 1999) : les enfants doivent acquérir la capacité à évoquer mentalement les quantités à partir des dénominations et cela indépendamment des caractéristiques concrètes des entités qui sont concernées. Ces deux dimensions soulèvent chacune des problèmes spécifiques, qui existent dans toutes les langues, comme l'atteste la lenteur équivalente de l'acquisition des premiers nombres (de un à dix) dans les cultures orientales et occidentales (Miller et Paredes, 1996).

Les comparaisons inter-langues attestent que les enfants asiatiques (Chine, Corée, Japon…) obtiennent des performances supérieures aux enfants occidentaux dans des épreuves d'arithmétique, même avant que l'école n'intervienne sur l'apprentissage (Wang et Lin, 2005). Cette supériorité paraît tenir au moins en partie au fait que le Chinois comme le Coréen et les autres langues de cette partie du monde présentent un système régulier (et décimal) de dénomination verbale des nombres entre dix et cent. Ceux-ci (exemple : trente-sept) sont élaborés en énonçant successivement le nombre de dizaines (exemple : trois dix) et le nombre d'unités (exemple : sept), soit « trois dix sept ». Cette organisation facilite l'acquisition et l'uti-lisation de la suite verbale des noms de nombres. La structure de la suite verbale dans les langues occidentales contraint les enfants en général, et les Français en particulier, à un apprentissage par cœur qui entraîne un retard croissant par rapport aux jeunes asiatiques. De plus, pour ce qui concerne plus spécifiquement les jeunes Français, les irrégularités de construction de soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt dix ajoutent de nouvelles difficultés qui se traduisent par des erreurs et des retards supplémentaires dans l'apprentissage (Fayol et coll., 2000). Toutefois, ce retard pourrait n'être que verbal et n'avoir aucune incidence sur la représentation et le traitement des quantités.

Une question fondamentale consiste à chercher à déterminer si les variations langagières influent sur les performances lors des activités arithmétiques. Il semble que ce soit le cas relativement à la résolution d'opérations arithmétiques simples (exemple : l'addition ou la multiplication). Ces opérations se résolvent soit en recourant à une procédure (exemple : pour m+n ajouter n fois un à m) soit en retrouvant en mémoire une association entre un couple d'opérandes et un résultat (3 x 2 = 6). Une question importante a trait à l'éventuel impact de la forme des éléments de la suite numérique sur la compréhension de la structure décimale des nombres et sur l'impact de celle-ci relativement à la résolution des opérations. Certaines caractéristiques du langage facilitent (Ho et Fuson, 1998) ou, au contraire, rendent plus difficile (Levine et coll., 1992) la résolution d'opérations simples. Par exemple, la structure des dénominations aide à décomposer ou recomposer des sommes ou des différences : la vérification de l'opération « VI = 5 + 1 » est plus rapide que celle de « VI = 3 + 3 » (Noël et Seron, 1997). La difficulté est de déterminer s'il s'agit de dimensions centrales, ayant trait à la qualité des représentations, ou de dimensions périphériques liées aux traitements des formats d'entrée et de sortie (Miller et Zhu, 1990).

Les faits arithmétiques, quant à eux, renvoient aux problèmes (additions, soustractions, multiplications) dont la solution ne requiert pas le recours à des processus de calcul. Le débat relatif au format, amodal ou modal, de stockage et de récupération des faits arithmétiques reste ouvert. Certaines thèses suggèrent un stockage indépendant de la modalité (McCloskey, 1992), d'autres défendent l'idée d'un format verbal unique de stockage des tables de multiplication et de quelques additions sous forme d'associations verbales (Dehaene et Cohen, 2000). Les dissociations décrites, les corrélations entre troubles du langage et troubles des faits arithmétiques mais aussi la mise en évidence d'effets d'amorçage constituent autant d'arguments en faveur d'un codage verbal des faits arithmétiques chez les adultes. À ces données s'en ajoutent d'autres ayant trait aux performances des enfants. La forme des mots-nombres influe sur leur vitesse de prononciation, laquelle détermine l'empan de la mémoire de travail (Ellis, 1992). Le langage peut ainsi avoir un effet indirect sur la cognition arithmétique. Les langues dans lesquelles la vitesse d'articulation des noms de nombres est très élevée permettent de disposer de capacités plus importantes de mémoire de travail et, donc, à la fois, d'utiliser des procédures de résolution plus coûteuses (Ellis, 1992) et de mémoriser plus facilement les associations entre opérandes et résultats. À terme, la représentation des faits arithmétiques et les processus de traitement s'en trouvent affectés et diffèrent d'une communauté linguistique à l'autre (Campbell, 1994a et b).

Différences linguistiques et transcodage

Les problèmes liés au transcodage et à la compréhension de la notation positionnelle chez les enfants de nos écoles paraissent liés aux problèmes linguistiques générés par certaines spécificités du français. La faible transparence de la base dix dans les langues occidentales influe négativement sur l'apprentissage de la numération écrite. Cette dernière ne comporte qu'un nombre limité de chiffres (10 : de 0 à 9) et recourt à la notation positionnelle pour coder les puissances de 10. En conséquence, plus la correspondance oral/écrit est régulière comme en Chinois (*shi yi*=dix un=11 ; *er shi san*=deux dix trois=23), Coréen ou Japonais, plus l'acquisition de la numération écrite est facile et rapide (Miura et coll., 1994). La mise en évidence de difficultés d'apprentissage du code indo-arabe en relation avec la structure des dénominations verbales dans la langue maternelle pose le problème de leur influence à plus long terme (Fayol et coll., 1996).

L'absence de transparence des systèmes verbaux occidentaux rend plus tardive et plus complexe la maîtrise du système par comparaison avec les performances des enfants d'Asie de sud-est. Cependant, une fois automatisées, les associations entre cardinalités et dénominations ou combinaisons, les problèmes disparaissent ou deviennent négligeables, sauf peut-être en France où l'utilisation de dizaines complexes pour 70, 80 et 90 rend problématique l'acquisition et continue à produire des effets négatifs encore en troisième primaire (Seron et Fayol, 1994), et même chez les adolescents en difficulté scolaire (Barrouillet et coll., 2004).

Les recherches conduites auprès d'enfants présentant des troubles du langage mettent en évidence que leurs performances sont relativement bonnes lorsqu'elles portent sur des données numériques en chiffres arabes (Donlan et Gourlay, 1999). Ces enfants manifestent le classique effet de distance symbolique lorsqu'ils doivent comparer des quantités exprimées soit sous forme analogique (dessins d'objets ou collections de jetons) soit en chiffres arabes. Ces données suggèrent que les tâches de jugement symbolique font appel à des représentations non verbales et sont traitées sans recodage verbal (Fazio, 1996). En revanche, les recherches conduites auprès des enfants sourds ont révélé que ces derniers présentent des difficultés en mathématiques dont les causes semblent, paradoxalement, difficiles à identifier.

Mathématiques chez l'enfant sourd

Une des causes possibles des faibles performances des enfants sourds serait leurs difficultés en lecture. En effet, lorsque les tests requièrent beaucoup de lecture, les performances en mathématiques sont corrélées avec la compréhension en lecture (Pau, 1995). De plus, de nombreux termes spatiaux sont utilisés en mathématiques. Ces termes représentent une difficulté particulière pour les enfants sourds (Durkin et Shire, 1991). Il en va de même de ceux qui induisent des confusions entre les mots-nombres (par exemple en anglais, entre « *eighteen* » et « *eighty* ») principalement dues à la similarité phonologique (Secada, 1984). Enfin, les enfants sourds, comme tous les enfants ayant des troubles du langage, ont des difficultés particulières avec les connecteurs logiques comme « si », « parce que » et même avec des quantificateurs comme « quelques » ou « la plupart ».

Si les difficultés en lecture des enfants sourds peuvent donc être une cause de leurs moindres performances en mathématiques, elles ne permettent néanmoins pas d'expliquer leurs faibles performances dans des tâches ne demandant pas de lecture comme les tâches de conservation (Watts, 1982) ou la Tour de Hanoï (Luckner et McNeill, 1994). De plus, le degré de perte auditive n'a que très peu d'impact sur les scores aux tests mathématiques (Wood et coll., 1983). D'autres facteurs que les capacités langagières ont donc été avancés pour expliquer leurs moindres performances. Kohen-Raz et Masalha (1988) montrent, par exemple, que des facteurs non-verbaux tels que certaines habiletés motrices peuvent être impliqués dans les difficultés des enfants sourds. Ces facteurs sont éventuellement liés aux dysfonctionnements neurologiques que l'on trouve dans la population sourde (Kaga et coll., 1981). Une autre hypothèse suggère que ce n'est pas la surdité en elle-même qui cause les difficultés en mathématiques mais que c'est le manque d'information et la moindre opportunité d'apprentissages « accidentels » (par exemple grâce aux chansons ou émissions enfantines) dont elle est la cause qui entraînent un moins bon apprentissage (Rapin, 1986).

En résumé, les rapports entre langage et nombre ne sont pas aussi étroits et directs que l'évolution des habiletés numériques chez l'enfant pourrait le laisser penser. Cette relative indépendance renforce l'hypothèse que les systèmes verbaux viennent se greffer sur les systèmes analogiques, antérieurs sur les plans phylo- et ontogénétique, décrits chez l'animal et le bébé. Ces systèmes verbaux, dont le principe initial consiste à affecter une étiquette verbale unique à chaque numérosité, limitent l'usage spontané du nombre aux entiers naturels, comme le montre bien l'étude des tribus d'Amazonie. C'est sans doute la raison pour laquelle l'introduction des fractions et des décimaux pose de tels problèmes aux enfants de l'école primaire.

Décimaux et fractions

Bolon (1993) rapporte une étude menée auprès de 135 élèves de 6^{e} qui révèle que 65 % des enfants ne savent pas placer 9/4 sur une droite graduée de 0 à 9 (voir aussi Perrin-Glorian, 1986). Plus de la moitié des enfants ont des difficultés avec les produits, l'écriture fractionnaire d'un décimal, l'écriture décimale d'une fraction, les approximations. Ces difficultés sont loin d'être résolues au lycée. Les erreurs observées ne sont pas aléatoires. Elles sont reproductibles et persistantes, probablement dues à des représentations et conceptions erronées qui font ensuite obstacle à la suite de l'apprentissage des décimaux et des fractions.

Décimaux

Brousseau (1983) distingue trois origines différentes pour les obstacles didactiques : ceux d'origine ontogénique qui surviennent du fait des limitations de l'enfant à un moment de son développement ; ceux d'origine didactique qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ; ceux d'origine épistémologique qui sont constitutifs de la connaissance visée. On retrouve parfois ces derniers dans l'histoire des concepts eux-mêmes, et il est illusoire de vouloir y échapper.

Associer les décimaux à des mesures et les séparer du monde des fractions a créé un certain nombre d'obstacles didactiques qui provoquent des erreurs caractéristiques telles que penser que 8,35 est plus petit que 8,257 puisque 35 est plus petit que 257 (Comiti et Neyret, 1979), ou qui permettent des écritures ambiguës comme 1,850 kg=1 850 g, ce qui n'est vrai que si le nombre reste étroitement associé à l'unité de mesure. De là différentes tentatives et propositions visant à rapprocher décimaux et fractions (Comiti et Neyret, 1979 ; Brousseau, 1983).

Fractions

Les enfants paraissent disposer d'une représentation naïve très précoce des fractions (Mix et coll., 1999 ; Gallistel et Gelman, 1992) et ont de nombreuses occasions de les manipuler dans leur vie quotidienne (situation de partage). Malgré cela, l'apprentissage des fractions se révèle très difficile pour la plupart d'entre eux (Clements et Del Campo, 1990). Diverses raisons ont été émises afin d'expliquer ces difficultés. Tout d'abord, les toutes premières connaissances acquises par les enfants au sujet des fractions reposent quasi-exclusivement sur les situations de partage (Watson et coll., 1999). Cette conception des fractions comme « la partie d'un tout » empêche de les considérer comme des nombres. Une deuxième source possible de difficultés serait l'association faite par les enfants entre les fractions et des objets concrets, comme pour l'apprentissage des nombres entiers. Le fait que les fractions évoquent une représentation concrète rend l'idée même d'opérations sur les fractions difficilement concevable. Toutefois, certains auteurs préconisent de conserver le lien existant entre les fractions et leurs diverses représentations concrètes. Ce serait en multipliant les représentations concrètes associées à chaque fraction que les enfants pourraient abstraire le concept de fraction (Streefland, 1997).

En résumé, les difficultés rencontrées par les enfants dans l'apprentissage des fractions peuvent être attribuées à la prédominance d'un modèle inapproprié, à l'utilisation de représentations concrètes, à la difficulté de concevoir les fractions comme des nombres, à l'application sans réelle compréhension de procédures calculatoires, sans qu'on puisse déterminer les poids respectifs de chacun de ces facteurs.

Résolution de problèmes

La résolution de problème demeure l'activité dans laquelle les élèves rencontrent le plus de difficultés, comme l'indiquent toutes les études internationales (Fayol et coll., 1997). Ainsi, les processus cognitifs sous-tendant la résolution de problèmes font-ils l'objet de nombreuses études en psychologie. De même, la formulation et le contexte de présentation des problèmes, l'impact qu'ils ont sur les performances et les progrès des élèves sont au cœur des préoccupations des spécialistes de la didactique et de l'éducation.

Problèmes verbaux : le point de vue cognitif

Tous les chercheurs s'accordent pour admettre qu'il existe différents types de problèmes additifs et pour considérer que ces grandes catégories ne sont pas réductibles à l'opération mise en jeu (Fayol, 1991). Pour résoudre un problème arithmétique à énoncé verbal, les sujets doivent posséder des connaissances conceptuelles relatives aux accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons. C'est sur cette base que les taxonomies ont été construites. La classification la plus connue (Riley et coll., 1983) distingue trois grands ensembles de problèmes. En premier lieu, les problèmes de changement impliquent tous au moins une transformation temporelle appliquée à un état initial et aboutissant à un état final. La seconde catégorie correspond aux problèmes de type combinaison qui concernent des situations statiques (par exemple, Marc a 5 billes, Luc a 3 billes, combien ont-ils de billes ensemble ?). Une troisième catégorie regroupe les problèmes de comparaison dans lesquels il s'agit également de comparer des situations statiques à l'aide de formulations du type « plus de / moins de ». La validité écologique de cette classification a été attestée car d'une part, des problèmes du même type donnent lieu à des réussites décalées dans le temps (par exemple, les problèmes de comparaison et les problèmes à états initiaux inconnus sont les plus tardivement réussis). D'autre part, des types de problèmes différents donnent lieu à des taux de réussite différents chez des sujets de même âge ou de même niveau scolaire. La classification précédente repose sur les concepts d'accroissement, de diminution, combinaison et comparaison. La seule classification purement conceptuelle provient de Vergnaud (1982), qui a isolé 6 catégories de relations en fonction de trois types de concepts principaux : la mesure, les transformations temporelles et les relations statiques.

Plus que l'opération à effectuer, la sémantique et la structure du problème déterminent pour une large part les performances et les stratégies des sujets. En effet, ces facteurs déterminent la forme, la nature et la difficulté de construction de la représentation. Pour comprendre un problème, il faut s'en construire une représentation soit par particularisation d'un schéma soit par construction d'une représentation de situation (Richard, 1990).

Un schéma est un ensemble de connaissances abstraites qui peuvent être définies comme les traces laissées en mémoire par les situations rencontrées précédemment et organisées en objet structuré ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques (Schank et Abelson, 1977 ; Kintsch et Greeno, 1985). Ainsi, le sujet extrairait les caractéristiques invariantes de chaque catégorie de problème et constituerait ainsi des cadres correspondant à leur structure. Ces cadres, disponibles en mémoire à long terme, comporteraient un certain nombre de places vides (ou variables) qui seraient remplies (instanciées) par des informations spécifiques (des objets) fournies par l'énoncé. Ainsi, le sujet sélectionnerait le schéma correspondant à l'organisation relationnelle des données et mettrait en œuvre les procédures pertinentes. Le problème est alors résolu. Cette conception rend compte du fait que certains problèmes sont plus difficiles à résoudre que d'autres du fait qu'ils correspondent directement ou non à des schémas utilisables (Kintsch et Greeno, 1985). Elle permet également d'expliquer l'effet facilitateur du placement de la question en tête d'un énoncé arithmétique (Devidal et coll., 1997).

En l'absence de schéma disponible en mémoire à long terme, les sujets sont obligés de construire en mémoire de travail une représentation *ad hoc* de la situation problème dite modèle de situation (Kintsch, 1979) ou modèle mental (Johnson-Laird, 1983). Cette représentation conserve les relations entretenues entre les divers éléments qu'elle intériorise (Van Dijk et Kintsch, 1983). Ainsi, les aides à la construction d'une représentation adéquate, soit en fournissant du matériel concret (Jaspers et Van Lieshout, 1994a et b), soit en enseignant à représenter sur des diagrammes les relations entre les différentes quantités du problème (Willis et Fuson, 1988), améliorent les performances.

La théorie des schémas et celle des modèles de situation ou modèles mentaux fournissent donc une interprétation des changements de performances en fonction des caractéristiques sémantiques des énoncés de problèmes (Thévenot et coll., 2004). Cependant, ces performances ne dépendent pas exclusivement des caractéristiques des énoncés mais peuvent être dépendantes de caractéristiques inhérentes aux individus confrontés aux problèmes. En effet, une grande partie de la variance observée en résolution de problèmes verbaux est attribuable aux capacités de compréhension du texte (De Corte et Verschaffel, 1985 ; Cummins et coll., 1988). De même, comme cela a été montré pour la résolution d'opérations simples, les difficultés en résolution de problèmes semblent liées à des déficits en mémoire de travail (Swanson, 1994 ; Passolunghi et Siegel, 2001).

Il est également impossible de négliger la situation dans laquelle est plongé l'élève : dans une classe, avec un instituteur, à l'école. Certains auteurs (De Corte et Verschaffel, 1985) ont montré que la connaissance d'un schéma général, représentation de ce qu'est un texte de problème à l'école, était indispensable pour mener à bien la résolution. D'autres auteurs

(Carpenter et coll., 1983), en examinant les caractéristiques des énoncés et les objectifs des enseignants, ont expliqué comment ce schéma pouvait se construire, puis parfois devenir une caricature de lui-même. C'est cette caricature qui explique l'apparition de comportements détachés du monde réel et de tout bon sens.

De Corte et Verschaffel (1985) ont suggéré qu'une partie des erreurs observées était imputable à l'absence d'un *Word Problem Schema*, ou WPS. Ce schéma, formel et général, pilote la lecture de l'énoncé. Il est surordonné par rapport aux schémas sémantiques et relationnels évoqués plus haut et met en œuvre des processus d'interprétation pragmatiques qui s'ajoutent aux processus d'interprétation sémantique. Il engage des connaissances concernant la structure, le rôle, et les objectifs « du » problème arithmétique en général, tel qu'il est habituellement proposé à l'école. De Corte et Verschaffel (1985), mais aussi Brissiaud (1988), ou encore Coquin-Viennot (1996 et 2000) ont montré que le WPS, absent au début de la première année d'école, semble acquis par une majorité d'élèves vers 8 ans. Il est mobilisé sur la base du contexte (classe de mathématique) et du type de texte. Les connaissances pragmatiques sont rendues nécessaires par la nature stéréotypée des problèmes scolaires qui s'opposent aux problèmes quantitatifs de la vie réelle (Nesher, 1980). La raison de cet écart tiendrait à ce que les problèmes de l'école servent à enseigner l'arithmétique appliquée et non à résoudre des questions de la vie réelle. Les deux sont associés à des registres différents, sans correspondance (Gerofsky, 1996).

Il est facile de faire apparaître des erreurs qui manifestent les conceptions des élèves, (Brousseau, 1983 et 1990 ; Carpenter et coll., 1983). Les réponses absurdes seraient attribuables au caractère stéréotypé de la plupart des problèmes à énoncés verbaux, celui-ci résultant du *classroom climate*, autrement dit au contrat didactique résultant de l'objectif poursuivi par le maître (Gravemeijer, 1997). Verschaffel et coll. (1997) ont montré que l'attitude de déconnexion de la réalité s'observe chez des étudiants d'instituts de formation des maîtres dans les Flandres au même titre que chez les élèves. Il n'est, dans ces conditions, pas surprenant que le phénomène perdure en classe.

En conclusion, quatre remarques principales semblent pouvoir être dégagées, lesquelles indiquent en retour quatre directions possibles d'investigation à court et moyen terme.

Premièrement, il ne fait plus de doute que les êtres humains disposent dès la naissance, ou très précocement, d'habiletés proto-numériques qui orientent le comportement des jeunes enfants dans les situations dont les aspects quantitatifs sont pertinents. Apparemment héritées de l'évolution et présentes chez d'autres espèces, ces capacités iraient au-delà d'un sens naturel et fondamental du nombre et de la quantité et incluraient une compréhension intuitive de l'arithmétique simple, notamment la perception et la manipulation approximative des quantités. Ces représentations intuitives constitueraient une base sur laquelle fonder les premiers apprentissages (Fayol et Seron, 2005).

Deuxièmement, nous disposons de connaissances relativement précises de l'évolution des performances des enfants entre 3 et 7-8 ans. Même si certains aspects mériteraient d'être éclaircis, par exemple les processus qui permettent l'émergence de nouvelles stratégies, tout ou presque semble avoir été dit sur l'acquisition de la chaîne numérique verbale, son réinvestissement dans les procédures de quantification, et l'impact qu'ont ces dernières sur la création spontanée de stratégies permettant de résoudre les situations simples d'addition et de soustraction. Ces habiletés sur lesquelles nous avons le plus de connaissances sont aussi celles qui posent le moins de problèmes, comme l'apprentissage des algorithmes élémentaires de calcul des additions ou des soustractions simples (à un chiffre) (Fayol et coll., 1997). Les données disponibles permettent d'établir des trajectoires de développement et, donc, d'évaluer la relative conformité des performances d'un enfant en référence à celles de ses pairs. Ce qui a conduit à l'élaboration récente de plusieurs tests (Tedi-Math, Numerical).

Troisièmement, les rapports entre langage et arithmétique sont relativement bien étudiés et connus. Les recherches ont permis de dresser un panorama des différences interculturelles dues aux spécificités des diverses langues et de collecter des données relatives aux troubles qui résultent des difficultés de langage. Sans constituer un obstacle insurmontable, l'opacité des langues européennes, et plus particulièrement du français qui y ajoute la difficulté des dizaines complexes, contribue aux différences internationales qui sont systématiquement en faveur des pays asiatiques. Même si ces différences ne sont pas seulement imputables à la langue, les langues qui rendent transparent le système décimal sont probablement les plus appropriées à l'enseignement de l'arithmétique, notamment lors du passage au format indo-arabe et à la résolution des opérations complexes (par exemple soustractions avec retenues ou divisions). Il reste un domaine à explorer, celui qui a trait aux possibles substitutions de systèmes non verbaux (abaques, système indo-arabe) lors de l'apprentissage, pour des populations présentant des troubles spécifiques du langage.

Quatrièmement, il semble que les difficultés commencent lorsque les habiletés élémentaires, implicitement acquises et mises en œuvre au sein d'une culture donnée, doivent être intégrées et réinvesties dans des habiletés plus complexes comme l'utilisation des décimaux, les opérations sur de grands nombres, la compréhension de l'écriture positionnelle et ses rapports avec la base 10, ou encore la résolution de problèmes, qui demeure le principal écueil auquel se heurtent les enfants de l'école élémentaire. C'est bien dans le passage du nombre intuitif aux mathématiques que se situe la difficulté (Dehaene, 1997). C'est aussi là que nos connaissances sont les plus lacunaires.

Quelques domaines devraient donner lieu à des explorations précises. Le premier concerne les liens entre, d'une part, le système proto-numérique et les intuitions dont nous avons hérité grâce à l'évolution et, d'autre part le système numérique verbal. Les tentatives sont en effet rares qui prennent pour objet d'étude la cognition numérique dans la petite enfance, entre 2 et 4 ans. Il s'agit pourtant d'un moment clef du développement où il devrait être possible de déterminer si l'apprentissage du système numérique verbal s'appuie sur le système proto-numérique préexistant, ou bien s'il s'agit de deux constructions indépendantes qui ne sont qu'ensuite, et difficilement, mises en relation. Il devrait ainsi être possible de déterminer si les approches initiales du nombre doivent ou non s'appuyer sur les intuitions préverbales précoces.

Le deuxième domaine a trait à la résolution des opérations à plusieurs chifmodèle est rendue d'autant plus difficile que ces trois points sont traités par des domaines de recherche distincts (la compréhension de texte, le raisonnement, l'arithmétique cognitive).

BIBLIOGRAPHIE

ANTELL S, KEATING DP. Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development* 1983, **54** : 695-701

ASHCRAFT MH. Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition* 1992, **44** : 75-106

BAROODY AJ. Children's difficulties in subtraction : some causes and questions. *Journal of Research in Mathematics Education* 1984, **15** : 203-213

BARROUILLET P, FAYOL M, LATHULIÈRE E. Selecting between competitors in multiplication tasks: An explanation of the errors produced by adolescents with learning difficulties. *International Journal of Behavioral Development* 1997, **21** : 253-275

BARROUILLET P, CAMOS V, PERRUCHET P, SERON X. ADAPT: A Developmental, Asemantic, and Procedural model for Transcoding from verbal to Arabic numerals. *Psychological Review* 2004, **111** : 368-394

BOLON J. L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand* 1993, **52** : 49-79

BRANNON EM. What animals know about numbers. *In*: Handbook of mathematical cognition. CAMPBELL JID (ed). Psychology Press, New Yok, 2005

BRISSIAUD R. De l'âge du capitaine à l'âge du berger : quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2 ? *Revue Française de Pédagogie* 1988, **82** : 23-31

BROUSSEAU G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 1983, **4** : 165-198

BROUSSEAU G. Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1990, **9** : 309-336

BRYSBAERT M, FIAS W, NOËL MP. The whorfian hypothesis and numerical cognition: Is twenty four processed in the same way as four and twenty. *Cognition* 1998, **66** : 51-77

BUTTERWORTH B. What counts: How every brain is hardwired for math. The Free Press, New York, NY, 1999

CAMOS V. Le dénombrement : activité complexe à deux composantes. *Rééducation Orthophonique* 1999, **199** : 21-31

CAMPBELL JID. Network interference and mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition* 1987, **15** : 349-364

CAMPBELL JID. The role of associative interferencein learniing and retrieving arithmetic facts. *In*: Cognitive processes in mathematics. SLOBODA JA, ROGERS D (eds). Oxford, UK, Clarendon Press, 1994a

CAMPBELL JID. Architecture for numerical cognition. *Cognition* 1994b, **53** : 1-44

CAMPBELL JID. On the relation between skilled performance of simple division and multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 1997, **23** : 1140-1159

CAMPBELL JID, XUE Q. Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology : General* 2001, **130** : 299-315

CANFIELD RL, SMITH EG. Number-based expectations and sequential enumeration by 5-month-old infants. *Developmental Psychology* 1996, **32** : 269-279

CARPENTER TP, MOSER JM. The acquisition of addition and subtraction concepts. *In* : Acquisition of mathematical concepts and processes. LESCH R, LANDAU M (eds). New York, Academic Press, 1983

CARPENTER TP, MOSER JM. The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal of Research in Mathematics Education* 1984, **15** : 179-202

CARPENTER TP, LINDQUIST M, MATTHEWS W, SILVER EA. Results of the third NAEP mathematics assesment: Secondary School. *MathematicsTeacher* 1983, **76** : 652-659

CHARNESS N, CAMPBELL JID. Acquiring skill at mental calculation in adulthood: A task decomposition. *Journal of Experimental Psychology: General* 1988, **117** : 115-129

CLEMENTS MA, DEL CAMPO G. How natural is fraction knowledge? *In* : Transforming children's mathematics education: International perspectives. STEFFE LP, WOODS T (eds). Hillsdale, NJ, LEA, 1990

COMITI C, NEYRET R. À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen. *Grand N* 1979, **18** : 5-20

COQUIN-VIENNOT D. Lire une image pour produire un énoncé de problème arithmétique. *In* : UCIS'96 (Using Complex Information Systems): Cognitive, ergonomic, educational aspects. ROUET JF, LEVONEN JJ (eds). Poitiers, LACO, CNRS, Université de Poitiers, 1996 : 215-219

COQUIN-VIENNOT D. Lecture d'énoncés de problèmes arithmétiques : effet d'une introduction thématique sur la construction de la représentation. *Archives de Psychologie* 2000, **68** : 41-58

CUMMINS D, KINTSCH W, REUSSER K, WEIMER R. The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology* 1988, **20** : 405-438

DE CORTE E, VERSCHAFFEL L. Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior* 1985, **4** : 3-21

DE CORTE E, VERSCHAFFEL L. The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addtion and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education* 1987, **18** : 363-381

DEHAENE S. La bosse des maths. Editions Odile Jacob, Paris, 1997

DEHAENE S, COHEN L. Un modèle anatomique et fonctionnel de l'arithmétique mentale. *In* : Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres. PESENTI M, SERON X (eds). Solal, Marseille, 2000

DEVIDAL M, FAYOL M, BARROUILLET P. Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'Année Psychologique* 1997, **97** : 9-31

DONLAN C, GOURLAY S. The importance of non-verbal skills in the acquisition of place-value knowledge: Evidence from normally-developping and language-impaired children. *British Journal of Developmental Psychology* 1999, **17** : 1-19

DURKIN K, SHIRE B. Lexical ambiguity in mathematical contexts. *In*: Language in mathematical education: Research and practice. DURKIN K, SHIRE B (eds). Milton Keynes: Open University Press, 1991

ELLIS N. Linguistic relativity revisited: The bilingual word-length effect in working memory during counting, remembering numbers, and mental calculation. *In*: Cognitive processes in bilingual. HARRIS RJ (ed). Elsevier Publishers, Amsterdam, 1992

ENGLISH LD, HALFORD GS. Mathematics education. L.E.A., Mahwah, NJ, 1995

EVANS JSTBT, OVER DE. Rationality and reasoning. Psychology Press, Hove, UK, 1996

FAISZANG S. Les Sexes et leurs nombres. Sens et fonction du 3 et du 4 dans une société burkinabé. *L'Homme* 1985, **XXV-4** : 97-109

FAYOL M. L'enfant et le nombre. Delachaux & Niestlé, Paris, 1990

FAYOL M. Du nombre à son utilisation: la résolution de problème additifs. *In* : Les chemins du nombre. BIDEAUD J, MELJAC C, FISHER JP (eds). Lille PU 1991. Traduction: Pathways to number. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1992

FAYOL M. Langage et développement de l'apprentissage de l'arithmétique cognitive. *In* : Le développement des activités numériques. BIDEAUD J, LEHALLE H (eds). Hermès, Paris, 2002

FAYOL M, SERON X. On numerical representations. Insights from experimental, neuropsychological, and *In*: Handbook of mathematical CAMPBELL (ed). Academic Press, New York : 2005

FAYOL M, BARROUILLET P, RENAUD A. Pourquoi l'écriture des grands nombres est-elle aussi difficile? *Revue de Psychologie de l'Education* 1996, **1** : 109-132

FAYOL M, BAROUILLET P, CAMOS V. Early mathematics learning: What can reseach tell us ? Direction XXII de la Communauté Européenne, Bruxelles, 1997

FAYOL M, CAMOS V, ROUSSEL JL. Acquisition et mise en oeuvre de la numération par des enfants de 2 à 9 ans. *In* : La neuropsychologie du calcul. PESENTI M, SERON X (ed). SOLAL, Marseille, 2000

FAZIO BB. Mathematical abilities of children with specific language impairment: A follow-up study. *Journal of Speech and Hearing Research* 1996, **39** : 839-849

FEIGENSON L, CAREY S, SPELKE E. Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive* 2002, **44** : 33-66

FUSON KC. An analysis of the counting on solution procedure in addition. *In*: Addition and subtraction: A cognitive perspective. CARPENTER TP, MOSER JM, ROMBERG TA (eds). Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1982 : 67-81

FUSON KC. Children's counting and concepts of number. Springer-Verlag, New York, 1988

FUSON KC. Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multi-digit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction* 1990, **7** : 343-403

FUSON KC, RICHARDS J, BRIARS DJ. The acquisition and elaboration of the number word sequence. *In* : Children's logical and mathematical cogntion: Progress in cognitive developmental research. BRAINERD CJ (ed). Springer-Verlag, New-York, 1982 : 33-92

FUSON KC, KWON Y. Korean children's single-digit addition and subtraction: Numbers structured by ten. *Journal of Research in Mathematics Education* 1992, **23** : 148-165

GALLISTEL CR, GELMAN R. Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition* 1992, **44** : 43-74

GEARY DC. Children's mathematical development: Research and practical applications. APA, Washington, DC, 1994

GEARY DC. The problem size effect in mental addition: Developmental and cross-national trends. *Mathematical Cognition* 1996, **2** : 63-93

GELMAN R, GALLISTEL CR. The child's understanding of number. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1978

GEROFSKY S. A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* 1996, **16** : 36-45

GRAVEMEIJER K. Solving Word Problems: a Case of Modelling? *Learning and Instruction* 1997, **7** : 389-397

GROEN GJ, PARKMAN JM. A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review* 1972, **79** : 329-343

HAUSER MD, CAREY S, HAUSER LB. Spontaneous number representation in semi-free-ranging rhesus monkays. *Proceedings of the Royal Society of London Series B-Biological Sciences* 2000, **267** : 829-833

HIEBERT J, WEARNE D. Instruction, understanding and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction* 1996, **14** : 251-283

HO CS, FUSON K. Children's knowledge of teen quantities as tens and ones: Comparisons of Chinese, British, and American kindergartners. *Journal of Educational Psychology* 1998, **90** : 536-544

IFRAH G. Histoire universelle des chiffres. Robert Laffont, Paris, 1994

JASPERS MWM, VAN LIESHOUT ECDM. A CAI program for instructing text analysis and modelling of word problems to educable mentally retarded children. *Instructional Science* 1994a, **22** : 115-136

JASPERS MWM, VAN LIESHOUT ECDM. The evaluation of two computerised instruction programs for arithmetic word-problem solving by educable mentally retarded children. *Learning and Instruction* 1994b, **4** : 193-215

JOHNSON-LAIRD PN. Mental Models: Toward a cognitive science of language, inference, and consciousness. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1983

KAGA K, MARCH RR, TANAKA Y. Influence of labyrinthine hypoactivity on gross motor development of infants. *In* : Vestibular and oculomotor physiology. COHEN B (ed). New York Academy of Science, New York, 1981

KINTSCH W. On modeling comprehension. *Educational Psychologist* 1979, **14** : 3-14

KINTSCH W, GREENO JG. Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review* 1985, **92** : 109-129

KOHEN-RAZ R, MASALHA M. Relations of basic arithmetic and motor skills in deaf elementary school children. *Perceptual and Motor Skills* 1988, **66** : 275-282

KRUEGER LE. Single judgments of numerosity. *Perception & Psychophysics* 1982, **31** : 175-182

LEFEVRE J, SADESKY GS, BISANZ J. Selection of procedures in mental addition: Reassessing the problem size effect in adults. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 1996, **22** : 216-230

LEMAIRE P, ABDI H, FAYOL M. The role of working memory resources in simple cognitive arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology* 1996, **8** : 73-103

LEMAIRE P, BARRETT S, FAYOL M, ABDI H. Automatic activation of addition and multiplication facts in elementary school children. *Journal of Experimental Child Psychology* 1994, **57** : 224-258

LEVINE SC, JORDAN NC, HUTTENLOCHER J. Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology* 1992, **53** : 72-103

LEVY-BRUHL L. Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures. Vrin, Paris, 1912

LUCKNER JL, MCNEILL JH. Performance of a group of deaf and hard-of-hearing students and a comparison group of hearing students on a series of problem-solving tasks. *American Annals of the Deaf* 1994, **139** : 371-376

MANDLER G, SHEBO BJ. Subitizing: An analysis of its component processes. *Journal of Experimental Psychology: General* 1982, **11** : 1-22

MCCLOSKEY M. Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition* 1992, **44** : 107-157

MCCRINK K, WYNN K Large-number addition and subtraction by 9-month-old infants. *Psychol Sci* 2004, **15** : 776-781

MILLER KF, ZHU J. The trouble with teens: Accessing the structure of number names. *Journal of Memory and Language* 1990, **30** : 48-68

MILLER KF, PAREDES DR. On the shoulders of giants: Cultural tools and mathematical development. *In* : The nature of mathematical thinking. STERNBERG R, BEN ZEEV T (eds). Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1996 : 83-117

MIURA IT, OKAMOTO Y, KIM CC, CHANG CM, STEERE M, FAYOL M. Comparisons of children's cognitive representation of number: China, France, Japan, Korean, Sweden and the United States. *International Journal of Behavioral Development* 1994, **17** : 401-411

MIX KS. Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development* 1999, **14** : 269-297

MIX KS, LEVINE SC, HUTTENLOCHER J. Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology* 1999, **35** : 164-174

MIX KS, HUTTENLOCHER J, LEVINE SC. Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? *Psychological Bulletin* 2002, **128** : 278-294

NESHER P. The Stereotyped Nature of School Word problems. *For the Learning of Mathematics* 1980, **1** : 41-48

NOËL MP, SERON X. On the existence of intermediate semantic representations. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* 1997, **23** : 687-720

PASSOLUNGHI MC, SIEGEL LS. Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology* 2001, **80** : 44-57

PAU CS. The deaf child and solving rpoblems of arithmetic: The importance of comprehensive reading. *American Annals of the Deaf* 1995, **140** : 279-286

PERRIN-GLORIAN MJ. Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de college. *Petit x* 1986, **10** : 5-29

PIAGET J, SZEMINSKA A. La genèse du nombre chez l'enfant. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1941

PIAGET J, INHELDER B. La genèse des structures logiques élémentaires. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, 1959

PICA P, LEMER C, IZARD V, DEHAENE S. Exact and approximate arithmetic in an amazonian indigene groupe. *Science* 2004, **306** : 499-503

POWER RJD, LONGUET-HIGGINS JC. Learning to count: A computational model of language acquisition. *Proceedings of the Royal Society of London* 1978, **B200** : 391-417

RAPIN I. Helping deaf children acquire language: Lessons from the past. *International Journal of Paediatric Otorhinolaryngology* 1986, **11** : 213-223

RICHARD JF. Les activités mentales: Comprendre, raisonner, trouver des solutions. Armand Colin, Paris, 1990

RILEY MS, GREENO JG, HELLER JI. Development of children's problem solving ability in arithmetic. *In*: The development of mathematical thinking. GINSBURG HP (ed). Academic Press, New York, 1983

ROUSSEL JL, FAYOL M, BARROUILLET P. Procedural vs. direct retrieval strategies in arithmetic: A comparison between aaditive and multiplicative problem solving. *European Journal of Cognitive Psychology* 2002, **14** : 61-104

SAXE GB. Developing forms of arithmetical thought among the Oksapmin of Papua New Guinea. *Devlopmental Psychology* 1982, **18** : 583-594

SCHANK RC, ABELSON RP. Scripts, plans, goals, and understanding. Laurence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1977

SECADA WG. Counting in sign: The number string, accuracy and use. Unpublished Doctoral Dissertation, Department of Education, Northwestern University, 1984

SERON X, FAYOL M. Number transcoding in children: A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology* 1994, **12** : 281-300

SHARON T, WYNN K. Infants' individuation of actions from continuous motion. *Psychological Science* 1998, **9** : 357-362

SIEGLER RS. Individual differences in strategy choice: Good students, not-so-good students, and perfectionnists. *Child Development* 1988, **59** : 833-851

SIEGLER RS. The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology: General* 1987, **116** : 250-264

SIEGLER RS. Emerging minds: The process of change in children's thinking. Oxford University Press, New York, 1996

SIEGLER RS, SHRAGER J. Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? *In*: Origins of cognitive skills. SOPHIAN C (ed). Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1984

SIEGLER RS, JENKINS E. How children discover new strategies. Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1989

SIEGLER RS, SHIPLEY C. Variation, selection, and cognitive change. *In*: Developing cognitive competence: New approaches to process modeling. SIMON TJ, HALFORD GS (eds). Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1995

SIMON TJ. Reconceptualizing the origins of number knowledge: A non-numerical account. *Cognitive Development* 1997, **12** : 349-372

SPELKE ES, TSIVKIN S. Language and number: a bilingual training study. *Cognition* 2001, **78** : 45-88

STARKEY P, COOPER RG. Perception of numbers by human infants. *Science* 1980, **210** : 1033-1035

STEVENSON HW, STIGLER JW. The learning gap: Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education. Summit Books, New York, 1992

STRAUSS MS, CURTIS LE. Infant perception of numerosity. *Child Development* 1981, **52** : 1146-1152

STREEFLAND L. Charming fractions or fractions being charmed? *In*: Learning and teaching mathematics: An international perspective. NUNES T, BRYANT P (eds). Psychology Press, Hove, 1997

SWANSON HL. Short-term memory and working memory: Do both contribute to our understanding of academic achievement in children and adults with learning disabilities? *Journal of Learning Disabilities* 1994, **27** : 34-50

THEVENOT C, BARROUILLET P, FAYOL M. Représentation mentale et procédures de résolution de problèmes arithmétiques : l'effet du placement de la question. *L'Année Psychologique* 2004, **104** : 683-699

VAN DIJK T, KINTSCH W. Strategies of discourse comprehension. Academic Press, New York, 1983

VAN OEFFELEN MP, VOS PG. A probabilistic model for the discrimination of visual number. *Perception & Psychophysics* 1982, **32** : 163-170

VANLEHN K. Mind bugs: The origin of procedural misconceptions. MIT Press, Cambridge, MA, 1990

VERGNAUD G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtration problems. *In* : Addition and subtraction: A cognitive perspective. CARPENTER TP, MOSER JM, ROMBERG TA (eds). Erlbaum, Hillsdale, 1982

VERSCHAFFEL L, DE CORTE E, BORGHART I. Pre-Service Teachers' Conceptions and Beliefs About the Role of Real-World Knowledge in Mathematical Modelling of School Word Problems. *Learning and Instruction* 1997, **7** : 339-360

WANG J, LIN E. Comparative studies on US and chinese mathematics learning and the implications for standards-based mathematics teaching reform. *Educational Researcher* 2005, **34** : 3-13

WATSON JM, CAMPBELL KJ, COLLIS KJ. Structural development of the concept of fraction by young children. *Journal of Structural Learning and Intelligent Systems* 1999, **13** : 171-193

WATTS WJ. The performance of deaf, partially hearing and normally hearing children on conservation tasks of weight and area. *Teacher of the Deaf* 1982, **6** : 5-9

WILLIS GB, FUSON KC. Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology* 1988, **80** : 192-201

WOOD D, WOOD H, HOWARTH P. Mathematical abilities of deaf school-leavers. *British Journal of Developmental Psychology* 1983, **1** : 67-73

WYNN K. Addition and subtraction in human infants. *Nature* 1992, **358** : 748-750

WYNN K. Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science* 1996, **7** : 164-169

WYNN K. Psychological foundations of number: Numerical competence in human infants. *Trends in Cognitive Sciences* 1998, **2** : 296-303 (N9)

XU F. Numerical competence in infancy : Two systems of representation. Paper presented at the 12th Biennal International Conference on Infant Studies, 2000

XU F, SPELKE ES. Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 2000, **74** : B1-B11